

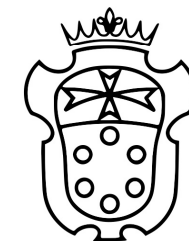
# Probabilità in Vulcanologia

Andrea Bevilacqua

Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

Formazione per insegnanti - Accademia dei Lincei e Normale per la Scuola  
LA MATEMATICA NEL MONDO CONTEMPORANEO

25 Gennaio 2019, SNS, Pisa



SCUOLA  
NORMALE  
SUPERIORE

# Un problema di Probabilità in Vulcanologia

Le eruzioni vulcaniche sono le emissioni di gas e magma sulla superficie del pianeta. Il magma è un mistura di roccia fusa, cristalli, e gas disciolto.

Un vulcano è una struttura geografica creata dalle eruzioni vulcaniche, ed esso può apparire come una montagna, un'ampia depressione o anche una semplice frattura.

La **previsione** delle eruzioni vulcaniche è un problema importantissimo e difficile.

Esso riguarda la stima di:

- **Luogo** ed estensione dell'apertura eruttiva
- **Tempo** di inizio e durata dell'eruzione
- **Volume** (e massa) del materiale eruttato
- **Tipologia** dell'eruzione e degli scenari pericolosi ad essa associati.



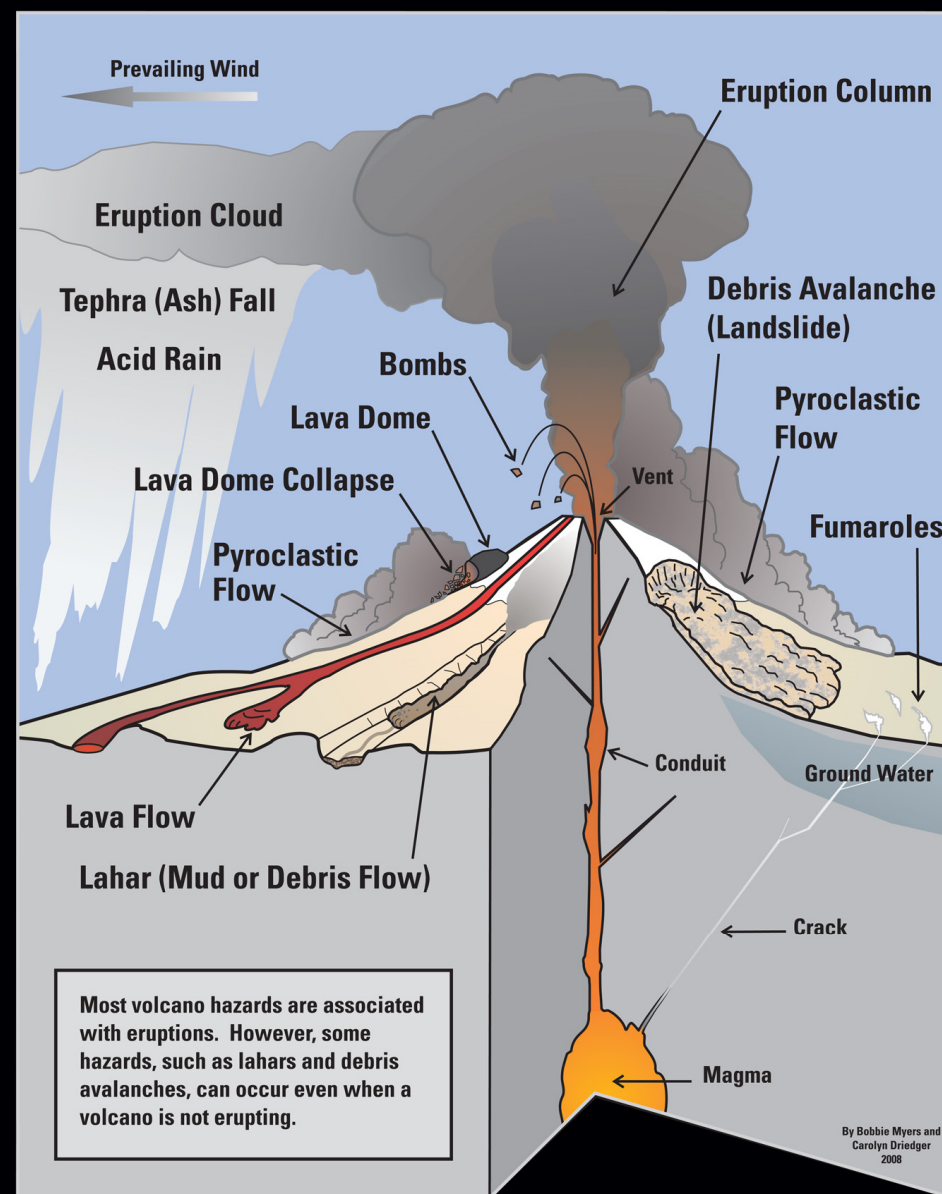
**Figura:** Vulcano Pinatubo (Filippine), 1991, USGS. Seconda eruzione più grande del XX secolo dopo Novarupta (Alaska), 1912.

# I fenomeni fisici pericolosi

Un'eruzione vulcanica è tipicamente associata a molteplici pericoli.

- **terremoti** (spesso a bassa profondità e distruttivi)
- **frane di versante** (talvolta associate ad esplosioni laterali o tsunami)
- **bombe vulcaniche** (blocchi di roccia scagliati a distanza)
- **caduta di cenere** (che può raggiungere grandi distanze)
- **flussi piroclastici** (valanghe di materiale ad alta temperatura)
- **flussi lavici** (di natura diversa a seconda della loro viscosità)
- **flussi di fango e detriti** (anche a distanza di secoli dall'eruzione)
- **gas ed aerosol tossici** (con effetti prolungati su persone ed animali)

## Geologic Hazards at Volcanoes



# Pericolosità, Rischio e Previsioni

Il **rischio** associato ad un fenomeno pericoloso  $F$  è una **misura positiva**  $R_F$  della quantità di persone uccise o beni distrutti da  $F$ .

Cioè,  $\forall T$  intervallo temporale e  $\forall A$  regione geografica di interesse,  $R_F(T \times A)$  misura il **costo** dei danni subiti nella regione  $A$  e nel tempo  $T$ .

Quantitativamente,  $R_F(T \times A)$  è definito dal prodotto di tre termini:

- **Pericolosità**  
Probabilità  $P_F(T \times A)$  che la regione  $A$  sia raggiunta da  $F$  in  $T$ .

←  
Modelli  
Fisici

Previsione  
delle  
eruzioni

- **Esposizione**  
Misura  $E(A)$  del valore dei beni presenti in  $A$  ed esposti ad  $F$ .

- **Vulnerabilità**  
Probabilità  $V$  che una persona raggiunta da  $F$  sia uccisa, o un bene distrutto (talvolta quantificando grado di ferimento/danno).

$$R_F(T \times A) = P_F(T \times A) \cdot E(A) \cdot V$$

I tre termini possono essere dettagliati:

$P_F$  con l'**intensità del fenomeno** che raggiunge  $A$ ,  
 $E$  con un'**evoluzione temporale** in  $T$ ,  
 $V$  con il **tipo di bene** e la sua specifica **fragilità**.



**Figura:** Schema di definizione del rischio

# Strutture Matematiche per la previsione delle eruzioni

I modelli deterministici sono un fiorente campo di studio in geofisica, ma le previsioni deterministiche sono ostacolate da:

- L'**incertezza** nel ricostruire le porzioni profonde del sistema vulcanico
- La **complessità** dei processi geofisici e la loro natura non-lineare.

Il problema è quindi anche studiato come un **sistema aleatorio** di cui abbiamo osservazioni incomplete ed affette da incertezza.

Ognuna delle variabili quantitative che descrivono l'eruzione è descritta con una **variabile casuale**:

- **X** il **luogo** dell'apertura eruttiva (un punto nello spazio, o un insieme limitato)
- **Z** il **tempo** dell'eruzione (l'istante d'inizio, o un intervallo che ne rappresenti la durata)
- **V** il **volume** dell'eruzione (il volume totale o una famiglia di volumi)



**Figura:** Vulcano Saryčev (Russia), 2009.  
Foto satellitare con nuvola «Pileus» (NASA)

La **tipologia di eruzione** è infine descritta comunemente da un **albero di eventi**: esso considera una famiglia di scenari possibili, e fornisce un modello per la stima della loro probabilità.

# Misure di probabilità affette da incertezza

Nella **previsione delle eruzioni**, non ci si limita soltanto a stimare le leggi delle variabili casuali che ne determinano le caratteristiche.

Ha un'estrema importanza poter valutare anche l'incertezza su tali stime. Ogni misura di probabilità è quindi definita da una **misura aleatoria**.

Una misura aleatoria è semplicemente una **misura affetta da incertezza**.

**Esempio:** sia  $Q$  il risultato casuale del lancio di un **dado sconosciuto**, che potrebbe avere 6 o 20 facce equiprobabili. La scelta del dado è anch'essa equiprobabile.



La probabilità  $P(E)$  dell'evento  $E = \{Q > 3\}$  è 50% nel primo caso, ma è 85% nel secondo.

Se  $P$  è rappresentata come una **misura aleatoria**, possiamo dire che  $P(E)$  vale 67.5% in media, ed ha un intervallo di incertezza da 50% a 85%.



In questo modo, si descrive separatamente l'incertezza dovuta al **lancio del dado**, e quella dovuta al **non conoscere** le sue caratteristiche (cioè il numero delle sue facce).

# Come caratterizzare l'incertezza

Nella previsione delle eruzioni vulcaniche, la **quantificazione dell'incertezza** assume un'importanza cruciale.

Grazie alle misure aleatorie possiamo distinguere:

- La **variabilità fisica** del sistema vulcanico, cioè la sua casualità intrinseca [il lancio del dado sapendo il numero di facce]
- L'**incertezza epistemica** dovuta alla nostra conoscenza imperfetta del sistema [la scelta casuale del numero di facce del dado].

Stimare l'incertezza epistemica non è un compito facile. Essa include:

- L'**incertezza nella scelta del modello** statistico con cui ottenere le previsioni.
- L'**incertezza sui dati** con i quali impostare i parametri del modello statistico.

I metodi più utilizzati per la caratterizzazione dell'incertezza epistemica sono:

- **Metodi di «giudizio degli esperti»** in cui si definisce l'incertezza epistemica quantificando e combinando le opinioni di un gruppo di persone.
- **Metodi Bayesiani** basati sullo studio dei dati a disposizione, condizionando cioè in base ad essi una misura di probabilità definita a priori.



**Figura:** Mount St. Helens (USA), 1982. Duomo lavico sorto del cratere del 1980. (USGS).

# Giudizio degli esperti strutturato

In una elicitazione di giudizio degli esperti a  $N$  persone vengono poste  $M$  domande con risposte numeriche, riguardo i parametri oggetto di stima.

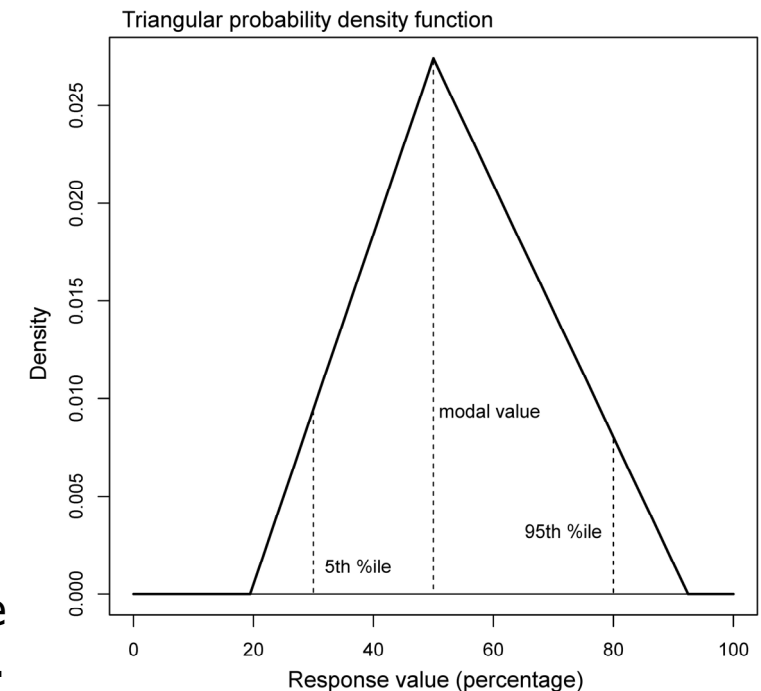
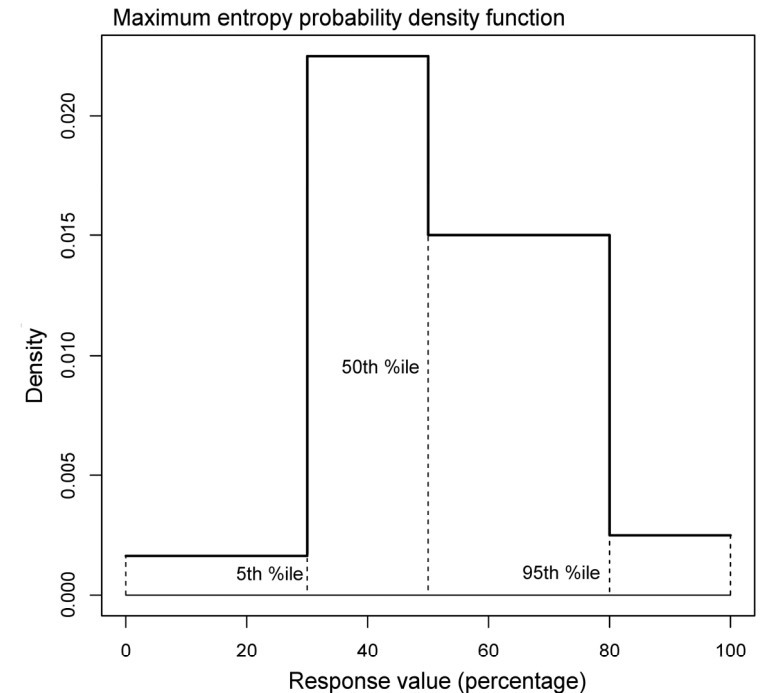
Per ogni domanda, ogni esperto può dare tre o più valori, che tipicamente rappresentano i percentili della distribuzione di probabilità che rappresenta la loro opinione.

Le risposte dei vari esperti sono poi combinate, tipicamente come combinazione lineare delle loro pdf, talvolta pesata in base alla performance mostrata in domande preliminari.

Questa mistura delle misure di probabilità è chiamata «decisore globale» e viene usata per campionare l'incertezza epistemica.

Molto spesso l'uso di alberi di eventi permette di decomporre la stima di un parametro «difficile» in più domande.

**Figura:** Esempi di risposte degli esperti, rappresentate con classi di pdf localmente costanti, o triangolari.





# Alberi di eventi

Un albero di eventi è un **grafo** in cui i nodi sono **eventi** in sequenza.  
 Ad ogni livello N dell'albero si ha una **partizione** dello spazio degli eventi:

$$\forall N, \Omega = \bigcup_{i \in I(N)} E_i^N, \quad \forall i \neq j, E_i^N \cap E_j^N = \emptyset.$$

Tale partizione è strutturata gerarchicamente:  $\forall N, \forall i \in I(N)$   
 $\exists J(i) \subseteq I(N+1)$  tale che

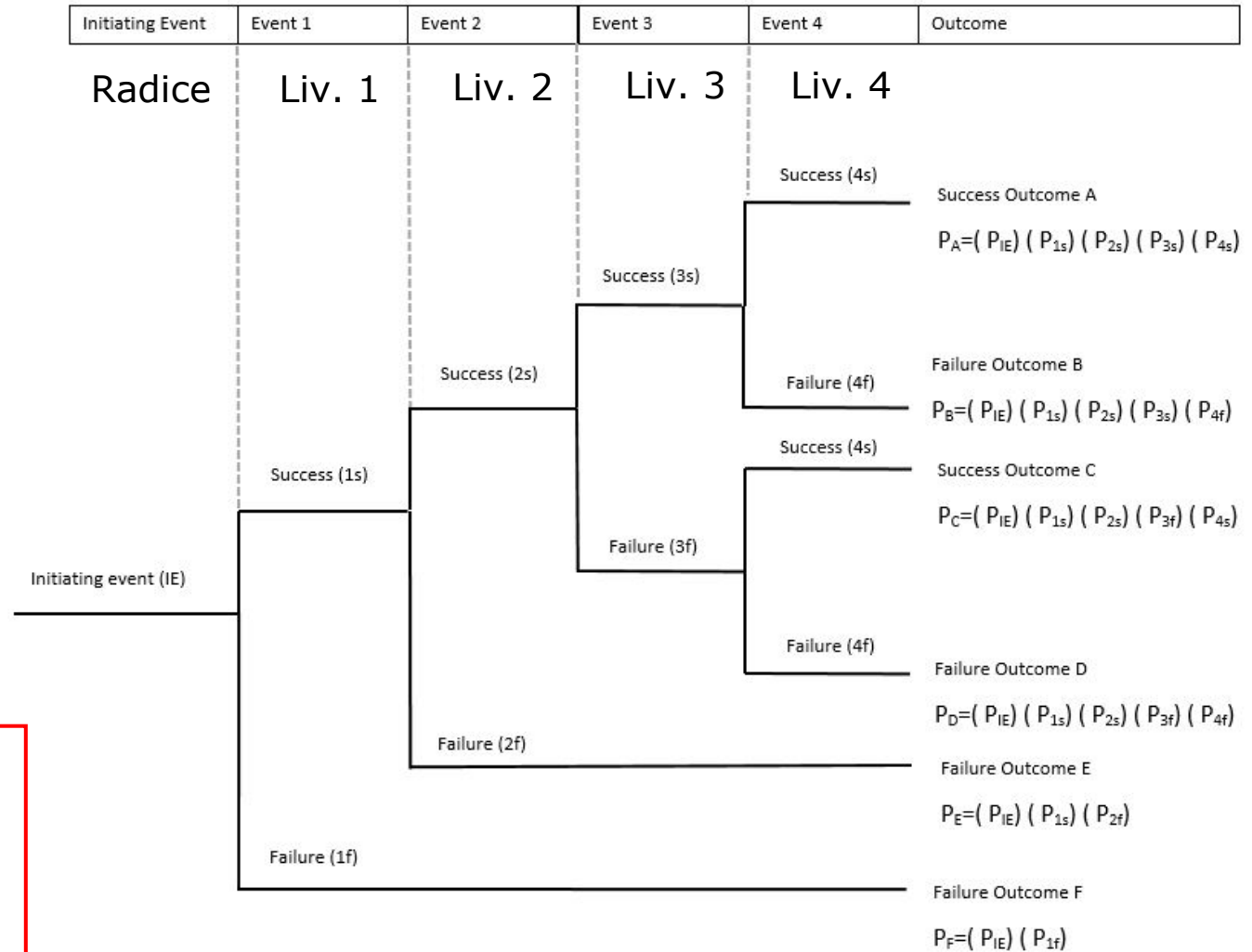
$$E_i^N = \bigcup_{j \in J(i)} E_j^{N+1}.$$

Gli archi sono i **nessi causali** fra gli eventi.

Al nodo n-esimo è associata una variabile discreta  $X_n$  di **legge**  $P_n$  sui  $k_n$  archi che ne partono, definita dai valori  $p_h = P_n(X_n = h), \forall h \leq k_n$ .

Se  $k=2$ , l'**incertezza** epistemica su  $p_1$  è talvolta espressa da una legge di probabilità chiamata  $Beta(\alpha, \beta)$ .

Le variabili Beta sono facilmente modificabili in caso di **osservazioni** a favore o contro l'ipotesi  $\{X = 1\}$ .



**Figura:** Esempio di albero di eventi **binario**: cioè  $\forall n, k_n=2$  e  $X_n$  variabile di Bernoulli.

# Un albero di eventi per il vulcano Somma-Vesuvio

Esso fornisce la probabilità degli **scenari di pericolo** potenzialmente generati da un risveglio magmatico del vulcano Somma-Vesuvio.

**Liv. 1** - verificarsi di frana laterale

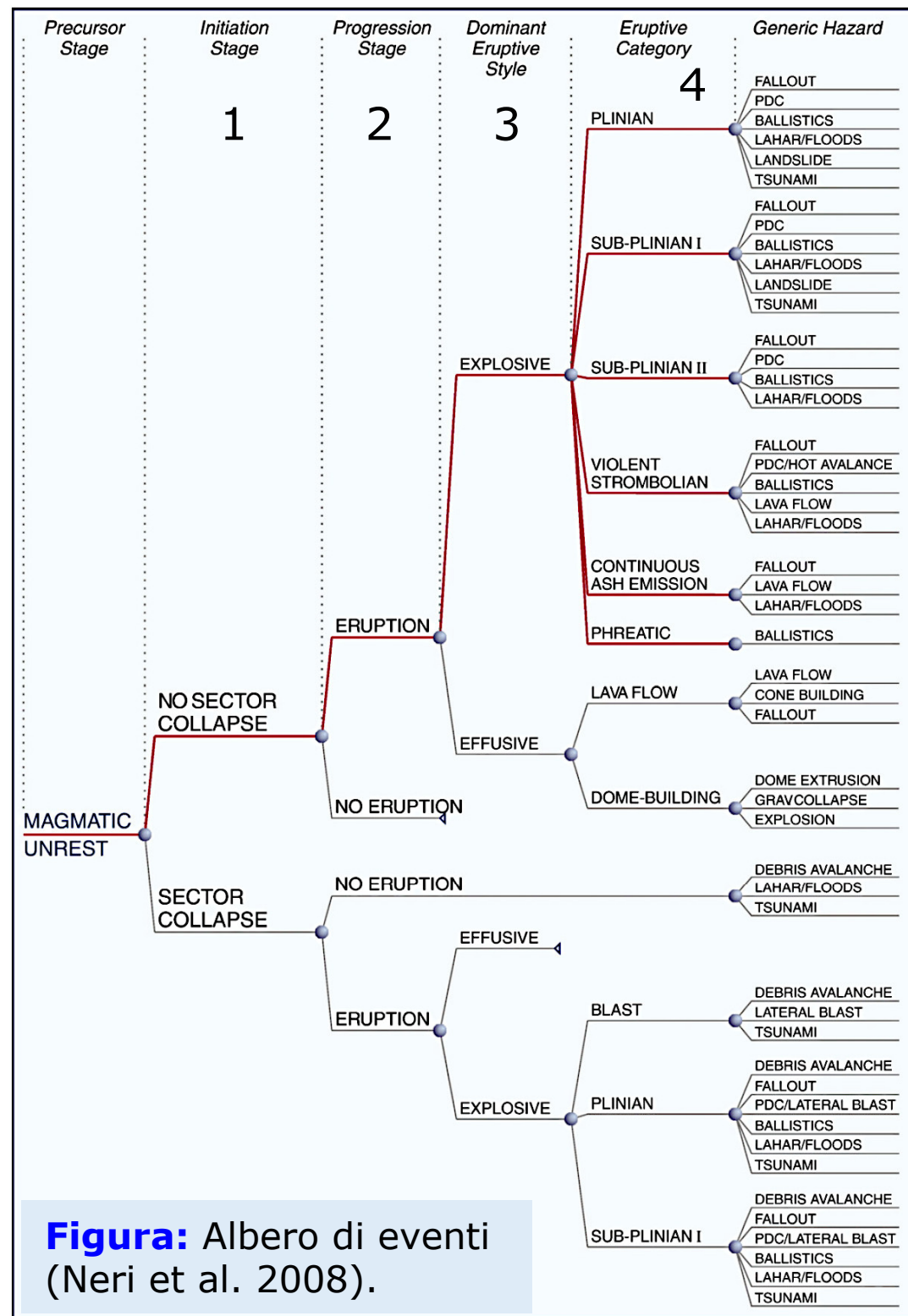
**Liv. 2** - verificarsi di eruzione

**Liv. 3** - eruzione effusiva o esplosiva

**Liv. 4** - tipo/scala dell'eruzione

Queste stime sono **condizionate** al verificarsi del risveglio, e non hanno alcun intervallo temporale associato.

I fenomeni pericolosi non sono eventi necessariamente **disgiunti**, e l'analisi di **multi-rischio** è un fiorente campo di studio.



**Figura:** Albero di eventi (Neri et al. 2008).

# Probabilità aleatorie nei nodi dell'albero

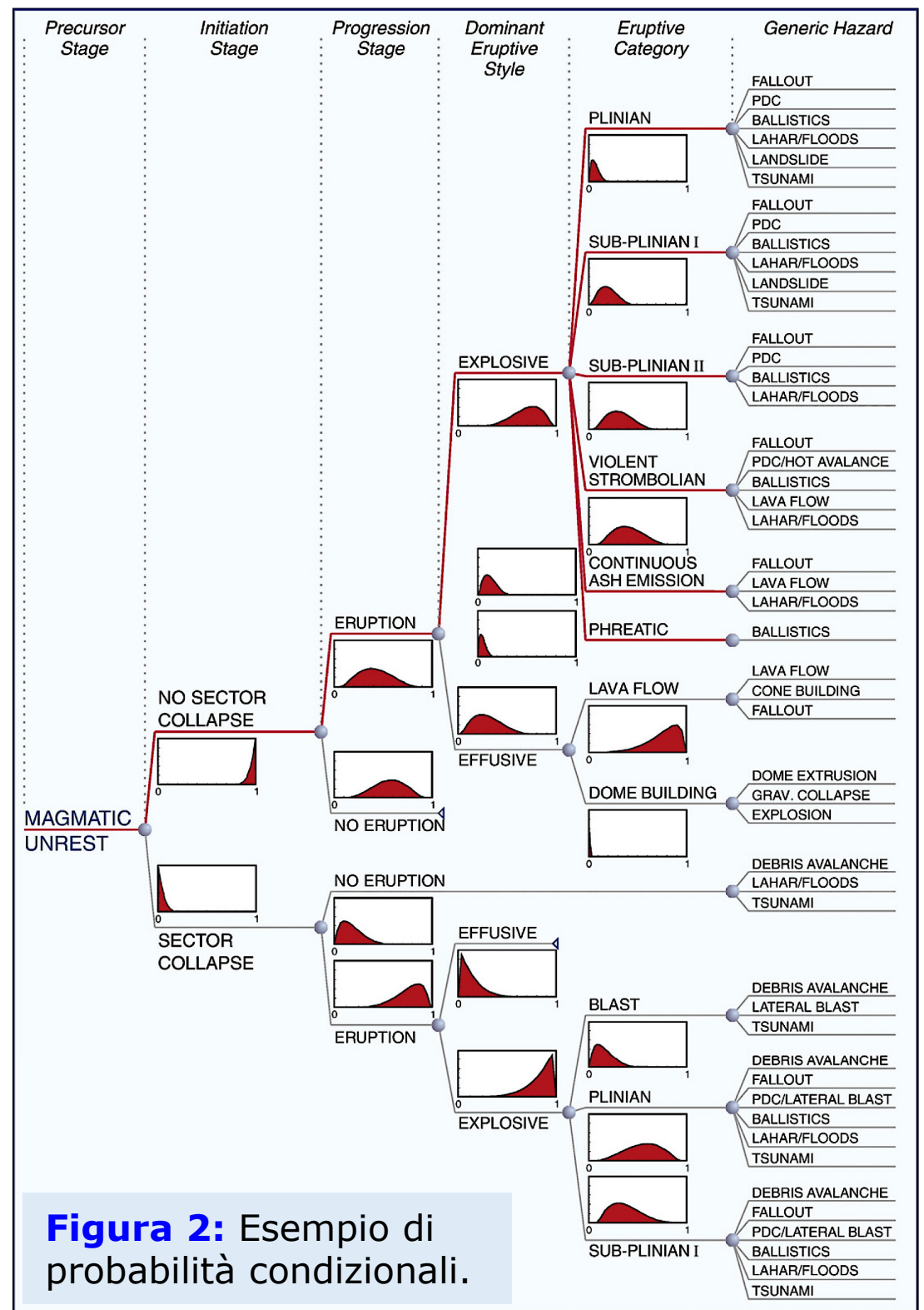
Tramite giudizio di esperti, ad ogni nodo è associata una probabilità affetta da incertezza.

La probabilità degli scenari pericolosi è stimata con la formula della **probabilità totale**.

L'incertezza è stimata grazie alla **Legge dei Grandi Numeri**, campionando casualmente le probabilità nei nodi.



**Figura 1:** Lateral blast of Mount St. Helens (USA), 1980 (K. Ronnholm).



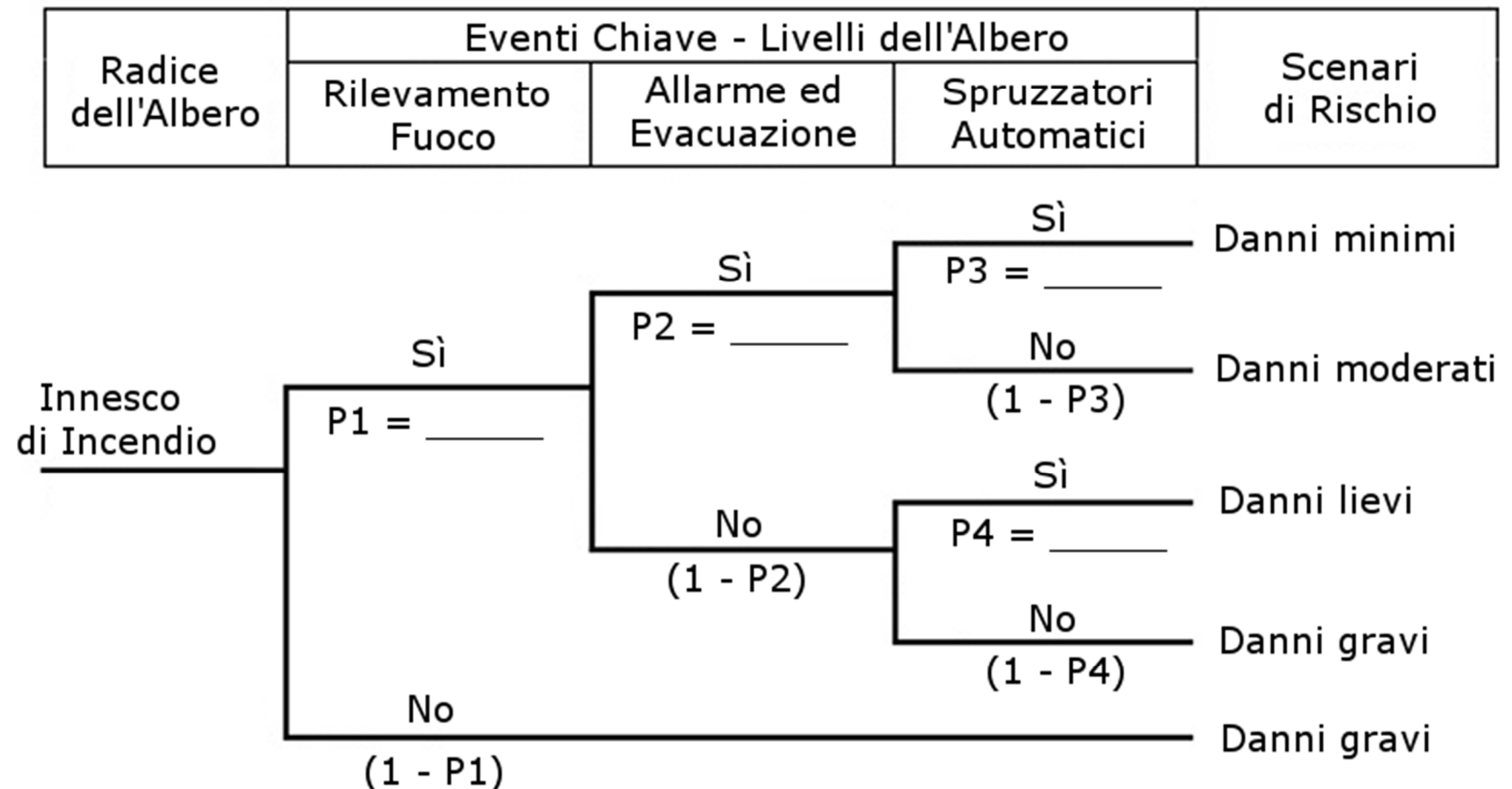
**Figura 2:** Esempio di probabilità condizionali.

# Un esercizio di giudizio di gruppo

Un semplice albero logico per stimare il rischio di incendio è distribuito ai partecipanti per svolgere un rapido [esempio pratico](#).

Prendete il rischio dell'incendio come un analogo semplificato del rischio vulcanico.

## Albero logico - Rischio di Incendio



**Figura:** Schema dell'albero di eventi relativo al rischio di incendio.

# Scenari di rischio e probabilità condizionali

Assumiamo di voler calcolare le probabilità dei quattro scenari di rischio:

- $S_1 = \{\omega \in \Omega : \text{l'incendio provoca danni gravi} \mid \text{si innesca un incendio}\}$
- $S_2 = \{\omega \in \Omega : \text{l'incendio provoca danni moderati} \mid \text{si innesca un incendio}\}$
- $S_3 = \{\omega \in \Omega : \text{l'incendio provoca danni lievi} \mid \text{si innesca un incendio}\}$
- $S_4 = \{\omega \in \Omega : \text{l'incendio provoca danni minimi} \mid \text{si innesca un incendio}\}$

Risumendo, si hanno:

- **danni gravi** se l'incendio divampa e l'evacuazione fallisce.
- **danni moderati** se l'incendio divampa, ma l'evacuazione riesce.
- **danni lievi** se l'incendio è spento, ma l'evacuazione fallisce.
- **danni minimi** se l'incendio è spento e l'evacuazione riesce.

$$P(S_1) = (1 - P_1) + P_1 \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_3)$$

$$P(S_2) = P_1 \cdot P_2 \cdot (1 - P_3)$$

$$P(S_3) = P_1 \cdot (1 - P_2) \cdot P_3$$

$$P(S_4) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

$P_1 \rightarrow$  Rilevamento  
 $P_2 \rightarrow$  Evacuazione  
 $P_3 \rightarrow$  Spegnimento

In tutti gli scenari, il **rischio assoluto** è ottenuto moltiplicando per la probabilità  $P_0$  che si inneschi l'incendio, per esempio  $P_0 = 0.1\%$

# Esempi di probabilità condizionali e probabilità totali

Vediamo alcuni esempi pratici:

$$P_1=P_2=P_3=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [10.9\%, 8.1\%, 8.1\%, \underline{72.9\%}]$$

Caso base.

$$P_1=50\%, P_2=P_3=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [\underline{50.5\%}, 4.5\%, 4.5\%, 40.5\%]$$

Sensori inefficaci.

$$P_2=50\%, P_1=P_3=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [14.5\%, 4.5\%, \underline{40.5\%}, \underline{40.5\%}]$$

Piano di evacuazione inefficace.

$$P_3=50\%, P_1=P_2=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [14.5\%, \underline{40.5\%}, 4.5\%, \underline{40.5\%}]$$

Spruzzatori inefficaci.

$$P_2=P_3=50\%, P_1=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [\underline{32.5\%}, 22.5\%, 22.5\%, 22.5\%]$$

Spruzzatori e piano di evacuazione inefficaci.

$$P_1=P_2=50\%, P_3=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [\underline{52.5\%}, 2.5\%, 22.5\%, 22.5\%]$$

Sensori e piano di evacuazione inefficaci.

$$P_1=P_3=50\%, P_2=90\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [\underline{52.5\%}, 22.5\%, 2.5\%, 22.5\%]$$

Sensori e spruzzatori inefficaci.

$$P_1=P_2=P_3=50\% \quad \Rightarrow \quad [P(S_i)]_{i \leq 4} = [\underline{62.5\%}, 12.5\%, 12.5\%, 12.5\%]$$

Sensori, piano di evacuazione e spruzzatori inefficaci.

# Considerazioni conclusive ed invito all'esercizio pratico

In una vera elicitazione le risposte sarebbero associate ad un intervallo di **incertezza**, e la risposta sarebbe rappresentata da una **variabile aleatoria**.

Associando un **costo**  $C_i$  ad ognuno degli scenari  $(S_i)_{i \leq 4}$ , si ottiene infine una stima di **rischio**  $R$ , condizionato all'innescarsi dell'incendio.

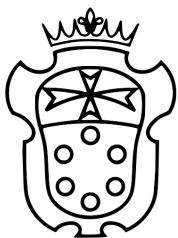
Per esempio, se  $[C_i]_{i \leq 4} = [10, 5, 2, 0]$  milioni di Euro, si avrebbe:

$R = 1.657$  milioni nel caso base di relativa efficacia (90% di successo) di ognuna delle contromisure.

.  
. .  
.

$R = 7.125$  milioni se sensori, piano di evacuazione, e spruzzatori sono relativamente inefficaci (50% di successo ognuno).

La conoscenza della probabilità  $P_0$  di innesco dell'incendio è essenziale per valutare il rischio in modo **assoluto**.



SCUOLA  
NORMALE  
SUPERIORE



ISTITUTO NAZIONALE  
DI GEOFISICA E VULCANOLOGIA