ANNALI DI GEOFISICA, VOL. XXXVI, SUPPL. N. 5-6, 1993

I principi metodologici della magnetotellurica su mezzi generalmente dispersivi

Domenico Patella
Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia, Università degli Studi «Federico II», Napoli, Italia

1. Introduzione

Numerose esperienze di campagna e di laboratorio, indirizzate allo studio della resistività delle rocce, hanno messo in luce l'esistenza di complessi fenomeni di polarizzazione, che alterano il normale meccanismo di conduzione della corrente. Infatti, il comportamento spaziale e temporale di un campo elettrico, generato all'interno di rocce polarizzabili da sorgenti esterne, si discosta sensibilmente da quello che ci si attenderebbe, se si ritenesse sempre valida la legge di Ohm nella sua nota formulazione elementare.

Gli effetti di polarizzazione si osservano quando nelle rocce si producono alterazioni dovute a circolazione di fluidi idrotermali, a migrazione di idrocarburi e a tettonizzazione. Gli effetti più intensi si manifestano quando per tali motivi si ha genesi di mineralizzazioni a solfuri.

Fra i vari metodi elettromagnetici di prospezione geofisica, che in linea di principio possono segnalare il verificarsi di fenomeni di polarizzazione, va annoverata la magnetotellurica (MT). Infatti, uno dei modi in cui la polarizzazione si manifesta nelle rocce consiste nella variazione della resistività al variare della frequenza di un flusso di corrente alternata che le attraversa (dispersione della resistività). Per questo motivo un materiale polarizzabile dovrà opporre resistività differenti alla penetrazione delle varie componenti monocromatiche, che definiscono il campo magnetotellurico globale.

Quindi, per una corretta impostazione del metodo MT, finalizzato all'interpretazione quantitativa di dati di campagna raccolti in aree dove la dispersione è attesa o più semplicemente sospettata, è quanto mai necessario definire i principi metodologici nell'ipotesi di esistenza di fenomeni di polarizzazione. Infatti il metodo MT, che viene sostanzialmente trattato nel dominio della frequenza e utilizzato per ricavare le geometrie sepolte attraverso lo studio del comportamento spaziale della resistività nel sottosuolo, richiede nelle applicazioni pratiche un'analisi accurata dei dati sperimentali nell'intervallo di frequenze tra 0.001 e 1000 Hz, che è proprio quello in cui si manifesta il fenomeno della dispersione della resistività nelle rocce, quando esiste.

Il presente articolo è interamente dedicato allo studio della propagazione del campo magnetotellurico all'interno d'una terra unidimensionale, cioè supposta caratterizzata, secondo un'approssimazione generalmente sufficiente ai fini pratici, da una sequenza di strati piano-paralleli, contenente uno o più strati dispersivi.

Sebbene l'esposizione degli argomenti sarà fornita con dovizia di sviluppi matematici e con ampie spiegazioni elementari dei fenomeni fisici in gioco, tuttavia la lettura del testo potrà non risultare facilmente accessibile a coloro che non abbiano un'adeguata preparazione fisico-matematica. Inoltre per motivi di scorrevolezza e concisione saranno dati per scontati diversi concetti relativi alla magnetotellurica classica, ritenendo che il lettore interessato affronti lo studio di questa monografia, partendo da una base di conoscenze adeguate.

In tutto l'articolo si utilizza il sistema di unità di misura MKSA razionalizzato.

2. Le equazioni di Maxwell in presenza di polarizzazione

Scriviamo le equazioni di Maxwell nel seguente modo:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(t) = -\,\mu \partial \boldsymbol{H}(t)/\partial t \qquad (2.1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{J}'(t) + \partial \boldsymbol{D}(t)/\partial t \qquad (2.2)$$

dove $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{J}'$ sono, nell'ordine, i vettori intensità del campo magnetico, intensità del campo elettrico, spostamento elettrico e densità di corrente di conduzione, e μ è la permeabilità magnetica, che praticamente per tutti i materiali terrestri risulta pari alla permeabilità magnetica del vuoto μ_0.

Alle eq. (2.1) e (2.2) aggiungiamo le condizioni cui devono soddisfare le divergenze dei vettori $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{H}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(t) = 0 \qquad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}(t) = 0 \qquad (2.4)$$

Mentre la condizione (2.4) è sempre verificata, la (2.3) è valida solo nell'ipotesi, generalmente accettabile all'interno delle rocce, che non esistano distribuzioni di cariche fisse.

Postuliamo adesso che tra $\boldsymbol{J}'$ ed $\boldsymbol{E}$ e tra $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$ intercorrano relazioni costitutive del tipo del legame che esiste tra ingresso e uscita in un sistema lineare, causale e invariante nel tempo, e cioè

$$\boldsymbol{J}'(t) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}'(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' \qquad (2.5)$$

$$\boldsymbol{D}(t) = \int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' \qquad (2.6)$$

dove $\tilde{\sigma}'(t')$ ed $\tilde{\varepsilon}(t')$ sono funzioni di risposta impulsiva.

Sostituendo queste relazioni costitutive nella seconda equazione di Maxwell, data dalla (2.2), si ottiene

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}'(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' \qquad (2.7)$$

Considerando la regola di derivazione dell'integrale di convoluzione, la (2.7) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \int_0^\infty [\tilde{\sigma}'(t') + \partial \tilde{\varepsilon}(t')/\partial t']\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' \qquad (2.8)$$

Ponendo infine

$$\tilde{\sigma}(t') = [\tilde{\sigma}'(t') + \partial \tilde{\varepsilon}(t')/\partial t'] \qquad (2.9)$$

la seconda equazione di Maxwell assume la forma definitiva

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' \qquad (2.10)$$

Il membro a destra dell'eq. (2.10) definisce il vettore densità di corrente totale $\boldsymbol{J}(t)$.

Alla $\tilde{\sigma}(t')$, cui si dà il nome di funzione di risposta impulsiva d'ammittività, sono associate, come conseguenza della definizione (2.9), le funzioni di risposta impulsiva di conducibilità $\tilde{\sigma}'(t')$ e di permittività $\tilde{\varepsilon}(t')$.

Il secondo membro della (2.10) rappresenta, in ultima analisi, una generalizzazione della legge di Ohm, adeguata agli scopi della presente trattazione.

Ovviamente, la condizione espressa dall'eq. (2.3), grazie alla relazione costitutiva (2.6), comporta che anche $\boldsymbol{E}(t)$ soddisfi alla condizione di divergenza nulla.

3. Le equazioni del campo magnetotellurico piano in presenza di polarizzazione

Cerchiamo ora soluzioni del sistema formato dalle eq. (2.1), (2.3), (2.4) e (2.10), che dipendano soltanto dal tempo e da una distanza lungo un asse nello spazio, non necessariamente coincidente con un asse coordinato del sistema di riferimento.

Sia pertanto ζ la variabile spaziale, il cui asse sia definito dal versore $\boldsymbol{n}$ avente coseni direttori n_x, n_y ed n_z.

La suddetta ipotesi di dipendenza funzionale dei vettori del campo implica che, in ogni istante, $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ siano costanti in direzione e ampiezza sui piani normali ad $\boldsymbol{n}$, così definiti

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \text{cost.} \tag{3.1}$$

dove $\boldsymbol{r}$ rappresenta il raggio vettore condotto dall'origine fino a un qualsiasi punto del generico piano.

Dato che i vettori del campo devono essere del tipo $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\zeta, t)$ e $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\zeta, t)$, le derivate parziali rispetto al sistema di coordinate ortogonali x, y, z possono essere espresse dalle relazioni

$$\begin{aligned} \partial/\partial x &= n_x \partial/\partial\zeta \\ \partial/\partial y &= n_y \partial/\partial\zeta \\ \partial/\partial z &= n_z \partial/\partial\zeta \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pertanto l'operatore ∇ diventa

$$\nabla = \boldsymbol{i}\partial/\partial x + \boldsymbol{j}\partial/\partial y + \boldsymbol{k}\partial/\partial z = \boldsymbol{n}\partial/\partial\zeta \tag{3.3}$$

essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ i versori degli assi coordinati x, y e z del sistema di riferimento, e quindi

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{n} \times \partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta \tag{3.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{n} \times \partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta \tag{3.5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{n} \cdot \partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta \tag{3.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{n} \cdot \partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta \tag{3.7}$$

Utilizzando queste identità, le eq. (2.1), (2.10), (2.3) e (2.4) diventano, rispettivamente

$$\boldsymbol{n} \times \partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta + \mu\, \partial\boldsymbol{H}(t)/\partial t = 0 \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{n} \times \partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta - \int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' = 0 \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta = 0 \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta = 0 \tag{3.11}$$

Consideriamo dapprima l'eq. (3.8). Derivando rispetto a ζ e moltiplicando vettorialmente per $\boldsymbol{n}$ si ottiene

$$\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times\partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2]+\mu\boldsymbol{n}\times\partial^2\boldsymbol{H}(t)/\partial t\partial\zeta=0 \tag{3.12}$$

Per una proprietà del doppio prodotto vettoriale si ha

$$\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2] = \boldsymbol{n}[\boldsymbol{n} \cdot \partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2] + \\ - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2 \tag{3.13}$$

L'eq. (3.10), opportunamente derivata rispetto a ζ, porta poi alla condizione

$$\boldsymbol{n} \cdot \partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2 = 0 \tag{3.14}$$

per cui

$$\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2] = -\partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2 \tag{3.15}$$

Inoltre, derivando rispetto a t la (3.9), si ottiene

$$\boldsymbol{n}\times\partial^2\boldsymbol{H}(t)/\partial t\partial\zeta=\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')[\partial\boldsymbol{E}(t-t')/\partial t]\mathrm{d}t' \tag{3.16}$$

Sostituendo la (3.15) e la (3.16) nella (3.12), risulta in definitiva

$$\partial^2\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta^2 = \mu\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')[\partial\boldsymbol{E}(t-t')/\partial t]\mathrm{d}t' \tag{3.17}$$

L'espressione (3.17) fornisce il primo risultato di rilievo di questa trattazione, poiché essa rappresenta l'equazione differenziale cui deve soddisfare la componente elettrica $\boldsymbol{E}(\zeta, t)$ del campo magnetotellurico piano, propagantesi in un mezzo dispersivo.

Con analoghi passaggi matematici si arriva alla seguente ulteriore equazione differenziale, quella, cioè, cui deve soddisfare la componente magnetica $\boldsymbol{H}(\zeta, t)$ del campo:

$$\partial^2\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta^2 = \mu\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')[\partial\boldsymbol{H}(t-t')/\partial t]\mathrm{d}t' \tag{3.18}$$

L'insieme delle equazioni differenziali (3.17) e (3.18) permette di analizzare compiutamente il comportamento spazio-temporale del campo magnetotellurico piano in una qualsiasi roccia, generalmente dispersiva, purché sia assegnata la corrispondente funzione di risposta impulsiva dell'ammittività.

4. Proprietà del campo magnetotellurico piano in mezzi dispersivi

Per una nota proprietà del prodotto misto tra vettori, si ha

$$\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{n}\times\partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta]=[\partial\boldsymbol{E}(t)/\partial\zeta]\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})=0 \quad (4.1)$$

poiché è $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$. Pertanto, se si moltiplica scalarmente per $\boldsymbol{n}$ l'espressione (3.8), si ricava immediatamente

$$\boldsymbol{n}\cdot\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial t=0 \quad (4.2)$$

Inoltre, il differenziale totale di $\boldsymbol{H}$ è dato da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}(t)=[\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial t]\mathrm{d}t+[\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta]\mathrm{d}\zeta \quad (4.3)$$

che, moltiplicato scalarmente per $\boldsymbol{n}$ e in virtù della (3.11) e della (4.2), fornisce

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{H}(t)=0 \quad (4.4)$$

Dalla (4.4) si evince che non possono aversi variazioni, tanto rispetto a ζ quanto rispetto a t, della componente del vettore $\boldsymbol{H}$ lungo l'asse delle ζ. La (4.4) è però compatibile con l'esistenza di un campo statico lungo ζ, che riterremo per comodità nullo, dal momento che l'interesse è rivolto solo ai campi variabili.

Riapplicando il prodotto misto, si ottiene anche

$$\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{n}\times\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta]=[\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\zeta]\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}) \quad (4.5)$$

Pertanto, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$ la (3.9), si ottiene immediatamente

$$\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t'=0 \quad (4.6)$$

Poiché la (4.6) deve valere per qualsiasi istante t, consegue che

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(t)=0 \quad (4.7)$$

da cui si deduce che la componente del campo elettrico $\boldsymbol{E}(t)$ lungo l'asse ζ è sempre nulla.

I risultati (4.4) e (4.7) dimostrano la trasversalità del campo. I vettori $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ di ogni campo magnetotellurico soggetto alle condizioni $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\zeta, t)$ ed $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\zeta, t)$ giacciono lungo piani normali all'asse della coordinata ζ. Questa proprietà era già ben nota dalla trattazione del problema analogo relativo ai materiali isotropi non dispersivi. Si è così dimostrato che la trasversalità del campo è una proprietà invariante rispetto ad una generalizzazione della legge di Ohm del tipo della (2.10).

Rispetto al sistema di riferimento ξ, η, ζ il vettore $\boldsymbol{E}(\zeta, t)$ ha solo le componenti E_ξ ed E_η generalmente non nulle. Entrambe devono soddisfare all'equazione differenziale (3.17), che può essere risolta separando le variabili. Sia cioè per E_ξ

$$E_\xi(\zeta, t)=f(\zeta)g(t) \quad (4.8)$$

Pertanto l'eq. (3.17) diventa

$$g(t)\mathrm{d}^2f(\zeta)/\mathrm{d}\zeta^2= \\ =\mu f(\zeta)\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')[\mathrm{d}g(t-t')/\mathrm{d}t]\mathrm{d}t' \quad (4.9)$$

da cui, separando le variabili e ponendo con k^2 il parametro della separazione, si ottengono le due seguenti equazioni differenziali di una variabile:

$$\mathrm{d}^2f(\zeta)/\mathrm{d}\zeta^2-k^2f(\zeta)=0 \quad (4.10)$$

$$[\mu/g(t)]\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')[\mathrm{d}g(t-t')/\mathrm{d}t]\mathrm{d}t'-k^2=0 \quad (4.11)$$

La soluzione della (4.10) è data da

$$f(\zeta)=A\exp[k\zeta]+B\exp[-k\zeta] \quad (4.12)$$

dove A e B sono parametri da determinare.

Per la funzione $g(t)$ assumiamo la soluzione particolare

$$g(t) = C\exp[pt] \qquad (4.13)$$

che, inserita nella (4.11), conduce al risultato che il coefficiente p deve soddisfare all'equazione caratteristica seguente:

$$p\mu\int_0^\infty \tilde{\sigma}(t')\exp[-pt']\mathrm{d}t' = k^2 \qquad (4.14)$$

Sostituendo le soluzioni (4.12) e (4.13) nell'eq. (4.8), si ottiene

$$E_\xi(\zeta, t) = E_{1\xi}\exp[k\zeta + pt] + E_{2\xi}\exp[-k\zeta + pt] \qquad (4.15)$$

Analogamente

$$E_\eta(\zeta, t) = E_{1\eta}\exp[k\zeta + pt] + E_{2\eta}\exp[-k\zeta + pt] \qquad (4.16)$$

Combinando le due soluzioni scalari (4.15) e (4.16), possiamo evidentemente accettare la seguente soluzione per il vettore campo elettrico:

$$\boldsymbol{E}(\zeta, t) = \boldsymbol{E}_1\exp[k\zeta + pt] + \boldsymbol{E}_2\exp[-k\zeta + pt] \qquad (4.17)$$

Ad $\boldsymbol{H}$ si deve attribuire la stessa dipendenza funzionale da ζ e da t, dal momento che deve soddisfare ad un'equazione differenziale, la (3.18), formalmente identica alla (3.17). Pertanto, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{H}(\zeta, t) = \boldsymbol{H}_1\exp[k\zeta + pt] + \boldsymbol{H}_2\exp[-k\zeta + pt] \qquad (4.18)$$

Dobbiamo evidentemente ritenere le (4.17) e (4.18) come soluzioni particolari del problema in studio, dal momento che, come proveremo nel seguito, la natura del campo magnetotellurico c'imporrà di scrivere soluzioni generali, certamente più complesse delle (4.17) e (4.18). Per il momento, però, è sufficiente proseguire nella trattazione con tali soluzioni particolari.

Siamo ora in grado di determinare $\boldsymbol{H}_1$ ed $\boldsymbol{H}_2$ in funzione di $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$. Dalla (4.17) si deriva

$$\partial \boldsymbol{E}/\partial\zeta = k\{\boldsymbol{E}_1\exp[k\zeta + pt] - \boldsymbol{E}_2\exp[-k\zeta + pt]\} \qquad (4.19)$$

e dalla (4.18)

$$\partial \boldsymbol{H}/\partial t = p\{\boldsymbol{H}_1\exp[k\zeta + pt] + \boldsymbol{H}_2\exp[-k\zeta + pt]\} \qquad (4.20)$$

Sostituendo le relazioni (4.19) e (4.20) nell'eq. (3.8), si ha

$$\begin{gathered}(k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 + \mu p\boldsymbol{H}_1)\exp[k\zeta + pt] + \\ -(k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2 - \mu p\boldsymbol{H}_2)\exp[-k\zeta + pt] = 0\end{gathered} \qquad (4.21)$$

Poiché questa identità deve valere per qualsiasi valore di ζ e t, consegue che i coefficienti degli esponenziali devono essere entrambi identicamente nulli. Deve cioè risultare, in maniera affatto indipendente

$$k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 + \mu p\boldsymbol{H}_1 = 0 \qquad (4.22)$$

$$k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2 - \mu p\boldsymbol{H}_2 = 0 \qquad (4.23)$$

Dalle (4.22) e (4.23) si ottiene poi

$$\boldsymbol{H}_1 = -(k/\mu p)\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 \qquad (4.24)$$

$$\boldsymbol{H}_2 = (k/\mu p)\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2 \qquad (4.25)$$

Per quanto dimostrato prima, il vettore $\boldsymbol{E}$, e quindi anche $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$, sono perpendicolari al versore $\boldsymbol{n}$; pertanto saranno valide le relazioni

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = 0 \qquad (4.26)$$

$$\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2 = 0 \qquad (4.27)$$

Ponendo le (4.24) e (4.25) nelle (4.26) e (4.27), rispettivamente, si deduce facilmente

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{H}_1 = 0 \qquad (4.28)$$

$$\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{H}_2 = 0 \qquad (4.29)$$

Ne consegue che $\boldsymbol{H}_1$ è sempre perpendicolare ad $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{H}_2$ a $\boldsymbol{E}_2$. Pertanto, si ha in conclusione

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.30}$$

La (4.30) dimostra che il vettore elettrico e quello magnetico di un campo definito dalle eq. (4.17) e (4.18) sono ortogonali, oltre che alla direzione $\boldsymbol{n}$, anche tra di loro. È facile accertare, anche questa volta, che la proprietà (4.30) non è nuova, essendo già verificata nel caso più semplice della propagazione in materiali non dispersivi. Abbiamo così dimostrato che l'ortogonalità mutua dei vettori di campo è anch'essa una proprietà invariante rispetto alla generalizzazione della legge di Ohm, data dalla (2.10).

5. Onde magnetotelluriche piane e armoniche in rocce dispersive

Le evidenze sperimentali ci suggeriscono che il campo magnetotellurico osservato possa immaginarsi come la composizione di singole componenti armoniche.

Giusto per iniziare nella maniera più semplice, possiamo ora prendere in esame un'armonica qualsiasi, oscillante alla generica frequenza angolare ω'. Ciò vuol dire che il parametro p, che sino ad ora è comparso sempre a fianco della variabile t, è un immaginario puro pari a

$$p = j\omega' \tag{5.1}$$

Sostituendo la (5.1) nella condizione (4.14), si ottiene

$$k^2 = j\omega'\mu \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}(t')\exp[-j\omega' t']\mathrm{d}t' \tag{5.2}$$

L'integrale che compare a destra nell'eq. (5.2) rappresenta la trasformata di Fourier della funzione di risposta impulsiva dell'ammittività, che definisce l'ammittività complessa funzione della frequenza. Poniamo cioè

$$\sigma(\omega') = \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}(t')\exp[-j\omega' t']\mathrm{d}t' \tag{5.3}$$

Con ciò la (5.2) diventa

$$k^2 = j\omega'\mu\sigma(\omega') \tag{5.4}$$

da cui

$$k = [j\omega'\mu\sigma(\omega')]^{1/2} \tag{5.5}$$

Il parametro k è noto come *numero d'onda*. Confrontando con la (5.5) l'analoga espressione che si ottiene nella situazione di assenza di dispersione, si trova che ora il numero d'onda dipende dalla frequenza anche attraverso l'ammittività. In altri termini, i valori di k risultano ora strettamente condizionati dai fenomeni di polarizzazione, che s'instaurano nelle rocce contestualmente all'insorgere del campo elettrico indotto dalle variazioni del campo magnetico terrestre. Pertanto il numero d'onda, pur mantenendo dal punto di vista formale la stessa struttura matematica del caso classico, nella sostanza non è un invariante se si inserisce la dispersione.

Richiamando le formule (4.17), (4.18), (4.24), (4.25) e (5.1), possiamo ora definitivamente scrivere la soluzione generale del campo magnetotellurico piano, sommando le varie componenti armoniche come segue:

$$\boldsymbol{E}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\boldsymbol{E}_1(\omega')\exp[k\zeta] + \boldsymbol{E}_2(\omega')\exp[-k\zeta]\}\exp[j\omega' t]\mathrm{d}\omega' \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{H}(\zeta,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (k/j\omega'\mu)\{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2(\omega')\exp[-k\zeta] + - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1(\omega')\exp[k\zeta]\}\exp[j\omega' t]\mathrm{d}\omega' \tag{5.7}$$

dove si è supposto che i coefficienti $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$ siano generalmente funzioni della frequenza.

6. Impedenza d'onda magnetotellurica nel caso di una terra stratificata e dispersiva

Cominciamo subito col richiamare alla memoria il modello di terra stratificata piano-parallela. Per esso intendiamo una sequenza di n lastre infinite sovrapposte, ciascuna identificata dallo spessore $h_i(i = 1,2,...,n-1)$, oppure, ciò che è lo stesso, dalla profondità della base d_i dalla superficie libera, e da un'ammittività $\sigma_i(\omega)(i = 1,2,...,n)$. Si assume evidentemente che l'ultima lastra costituisca il basamento e sia quindi assimilabile ad un semispazio di spessore infinito.

Facciamo ora coincidere il piano (ξ, η) con la superficie libera del terreno stratificato appena definito e inoltre l'asse ζ, verticale, sia diretto verso il basso. Possiamo sempre effettuare una rotazione del sistema di riferimento ξ, η, ζ intorno all'asse ζ in maniera tale che si abbia per le componenti elettriche

$$E_\xi(\zeta, t) \neq 0 \qquad E_\eta(\zeta, t) = 0 \qquad (6.1)$$

e per quelle magnetiche

$$H_\xi(\zeta, t) = 0 \qquad H_\eta(\zeta, t) \neq 0 \qquad (6.2)$$

Pertanto dalle relazioni (5.6) e (5.7) si ottengono le seguenti soluzioni scalari del campo magnetotellurico, che sono quelle che di fatto ci interessano ai fini pratici della prospezione:

$$E_{\xi,i}(\zeta,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{E_{1\xi,i}(\omega')\exp[k_i\zeta] + E_{2\xi,i}(\omega')\exp[-k_i\zeta]\}\exp[j\omega' t]d\omega' \quad (6.3)$$

$$H_{\eta,i}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (k_i/j\omega'\mu)\{E_{2\xi,i}(\omega')\exp[-k_i\zeta] + - E_{1\xi,i}(\omega')\exp[k_i\zeta]\}\exp[j\omega' t]d\omega' \quad (6.4)$$

La presenza dell'indice i $(i = 1,2,...,n-1)$ ci segnala ora che ad ogni strato deve competere una propria coppia di soluzioni del tipo (6.3) e (6.4). Ciò è vero per ogni strato, a partire dal primo $(i = 1)$ fino al penultimo $(i = n-1)$, fatta esclusione per il substrato $(i = n)$, per il quale la coppia di soluzioni è

$$E_{\xi,n}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\xi,n}(\omega')\exp[-k_n\zeta]\exp[j\omega' t]d\omega' \quad (6.5)$$

$$H_{\eta,n}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (k_n/j\omega'\mu)E_{2\xi,n}(\omega')\exp[-k_n\zeta]\exp[j\omega' t]d\omega' \quad (6.6)$$

Infatti abbiamo applicato la condizione al limite che i campi si annullino per $\zeta \to \infty$, e ciò necessariamente comporta che sia

$$E_{1\xi,n}(\omega') \equiv 0 \qquad (6.7)$$

D'altro canto, l'esponenziale che contiene ζ col segno positivo descrive esattamente il comportamento delle onde magnetotelluriche che viaggiano dal basso verso la superficie terrestre. Di conseguenza, queste non possono essere altro se non onde che hanno subito una riflessione su qualche superficie di discontinuità, e quindi non possono esistere nel basamento, giustificando ancora una volta la conclusione espressa dalla (6.7).

Deriviamo ora il parametro dell'impedenza d'onda magnetotellurica in un punto qualsiasi di una terra a n strati nel seguente modo. Partiamo dall'ipotesi che, nel dominio del tempo, il legame tra il campo elettrico e quello magnetico, valutati a una generica profondità ζ sia del tipo

$$E_{\xi,i}(\zeta, t) = \int_0^\infty \tilde{z}_i(\zeta, t')H_{\eta,i}(\zeta, t - t')dt' \qquad (6.8)$$

dove definiamo $\tilde{z}_i(\zeta, t')$ come funzione di risposta impulsiva d'impedenza magnetotellurica nello strato i-esimo, $(i = 1,2,..,n)$, che, per ragioni fisiche, deve essere una funzione causale. Dalla (6.8) otteniamo l'impedenza d'onda dispersiva nella piastra i-esima del modello, semplicemente applicando la trasformata di Fourier

$$Z_{n-i+1}(\zeta, \omega) = \int_0^\infty \tilde{z}_i(\zeta, t)\exp[-j\omega t]dt \qquad (6.9)$$

Sempre in virtù della trasformata di Fourier, la (6.8) diventa, nel dominio della frequenza,

$$E_{\xi,i}(\zeta, \omega) = Z_{n-i+1}(\zeta,\omega)H_{\eta,i}(\zeta, \omega) \qquad (6.10)$$

dove, ovviamente,

$$E_{\xi,i}(\zeta,\ \omega) = \int_0^{\infty} E_{\xi,i}(\zeta,\ t)\exp[-j\omega t]\mathrm{d}t \tag{6.11}$$

$$H_{\eta,i}(\zeta,\ \omega) = \int_0^{\infty} H_{\eta,i}(\zeta,\ t)\exp[-j\omega t]\mathrm{d}t \tag{6.12}$$

Sostituendo prima le eq. (6.3) e (6.4) e poi le eq. (6.5) e (6.6) nei rispettivi integrali di Fourier (6.11) e (6.12), è possibile ottenere

$$E_{\xi,i}(\zeta,\ \omega) = 2\pi\{E_{1\xi,i}(\omega)\exp[k_i\zeta] + \\ + E_{2\xi,i}(\omega)\exp[-k_i\zeta]\} \tag{6.13}$$

$$H_{\eta,i}(\zeta,\ \omega) = (2\pi k_i/j\omega\mu)\{E_{2\xi,i}(\omega)\exp[-k_i\zeta] + \\ - E_{1\xi,i}(\omega)\exp[k_i\zeta]\} \tag{6.14}$$

per $i = 1,2,\ldots,n-1$, e

$$E_{\xi,n}(\zeta,\ \omega) = 2\pi E_{2\xi,n}(\omega)\exp[-k_n\zeta] \tag{6.15}$$

$$H_{\eta,n}(\zeta,\ \omega) = (2\pi k_n/j\omega\mu)E_{2\xi,n}(\omega)\exp[-k_n\zeta] \tag{6.16}$$

per $i = n$.

Nella derivazione delle formule (6.13), (6.14), (6.15) e (6.16) si è tenuto conto che

$$\int_0^{\infty} \exp[j\omega' t]\exp[-j\omega t]\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega - \omega') \tag{6.17}$$

e che, in generale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x - x')\mathrm{d}x' = f(x) \tag{6.18}$$

Sostituendo nella (6.10) le due espressioni (6.13) e (6.14) prima, e le due espressioni (6.15) e (6.16) dopo, ed isolando la funzione di trasferimento $Z_{n-i+1}(\zeta,\ \omega)$, si ricavano per essa le seguenti relazioni:

$$Z_{n-i+1}(\zeta,\ \omega) = (j\omega\mu/k_i)\cdot \\ \cdot\frac{E_{1\xi,i}(\omega)\exp[k_i\zeta] + E_{2\xi,i}(\omega)\exp[-k_i\zeta]}{E_{2\xi,i}(\omega)\exp[-k_i\zeta] - E_{1\xi,i}(\omega)\exp[k_i\zeta]} \tag{6.19}$$

per $i = 1,2,\ldots,n-1$, e

$$Z_1(\zeta,\ \omega) = (j\omega\mu/k_n) \tag{6.20}$$

per $i = n$.

Poiché nel metodo di prospezione MT le misure vengono effettuate sulla superficie libera del terreno a n strati, è fondamentale la conoscenza dell'impedenza Z_n per $\zeta = 0$. Pertanto dalla (6.19) si deduce immediatamente

$$Z_n(0,\ \omega) = (j\omega\mu/k_1)\frac{E_{1\xi,1}(\omega) + E_{2\xi,1}(\omega)}{E_{2\xi,1}(\omega) - E_{1\xi,1}(\omega)} \tag{6.21}$$

Restano ora da calcolare le funzioni incognite $E_{1\xi,i}$ ed $E_{2\xi,i}$ ($i = 1,2,..,n - 1$). Si deve a tale scopo ricorrere alle condizioni al contorno di continuità sia della componente tangenziale del campo elettrico che di quella del campo magnetico. Nel nostro caso, dal momento che trattasi di due sole componenti, tali condizioni sono così espresse:

$$E_{\xi,i}(\mathrm{d}_i,t) = E_{\xi,i+1}(\mathrm{d}_i,t) \tag{6.22}$$

$$H_{\eta,i}(\mathrm{d}_i,t) = H_{\eta,i+1}(\mathrm{d}_i,t) \tag{6.23}$$

per $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Ritorniamo ora alla definizione (6.8) e la riscriviamo in modo da riferirla sia al fondo dello strato i-esimo che alla sommità dello strato successivo ($i + 1$)-esimo. Otteniamo le seguenti due espressioni:

$$E_{\xi,i}(\mathrm{d}_i,t) = \int_0^{\infty} \tilde{z}_i(\mathrm{d}_i,t')H_{\eta,i}(\mathrm{d}_i,t - t')\mathrm{d}t' \tag{6.24}$$

$$E_{\xi,i+1}(\mathrm{d}_i,t) = \int_0^{\infty} \tilde{z}_{i+1}(\mathrm{d}_i,t')H_{\eta,i+1}(\mathrm{d}_i,t - t')\mathrm{d}t' \tag{6.25}$$

Sostituendo nella (6.24) le condizioni (6.22) e (6.23), ricaviamo

$$E_{\xi,i+1}(\mathrm{d}_i,t) = \int_0^{\infty} \tilde{z}_i(\mathrm{d}_i,t')H_{\eta,i+1}(\mathrm{d}_i,t - t')\mathrm{d}t' \tag{6.26}$$

che confrontata con la (6.25) porta alla conclusione che

$$\tilde{z}_i(\mathrm{d}_i,t') = \tilde{z}_{i+1}(\mathrm{d}_i,t') \qquad (i = 1,2,...,n-1) \quad (6.27)$$

e, conseguentemente, grazie alla definizione (6.9), alla condizione di continuità dell'impedenza d'onda

$$Z_{n-i+1}(\mathrm{d}_i,\omega) = Z_{n-i}(\mathrm{d}_i,\ \omega) \qquad (6.28)$$

Riprendiamo in considerazione la (6.21), che riscriviamo nel modo seguente:

$$Z_n(0,\ \omega) = (j\omega\mu/k_1)\frac{\dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} + \dfrac{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}}{\dfrac{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}} - \dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}} \qquad (6.29)$$

avendo diviso numeratore e denominatore per $\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}\,\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}$. Usando quindi le identità

$$\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} = \exp\left[\ln\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}\right] \qquad (6.30)$$

$$\frac{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}} = \exp\left[-\ln\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}\right] \qquad (6.31)$$

e ricordando la definizione

$$\mathrm{ctgh}w = \frac{\exp[w] + \exp[-w]}{\exp[w] - \exp[-w]} \qquad (6.32)$$

dove w è una generica variabile complessa, la (6.29) diventa

$$Z_n(0,\ \omega) = -\ (j\omega\mu/k_1)\mathrm{ctgh}\left[\ln\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}}\right] \qquad (6.33)$$

Consideriamo ora nuovamente l'impedenza relativa allo strato superficiale valutata però per $z = h_1$, cioè alla base dello strato. Otteniamo dalla (6.19)

$$Z_n(h_1,\ \omega) = (j\omega\mu/k_1)\cdot$$

$$\cdot\frac{\exp\left[\ln\dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} + k_1h_1\right] + \exp\left[-\ln\dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} - k_1h_1\right]}{\exp\left[-\ln\dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} - k_1h_1\right] - \exp\left[\ln\dfrac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} + k_1h_1\right]} \qquad (6.34)$$

avendo ancora una volta fatto uso delle identità (6.30) e (6.31).

Anche l'eq. (6.34) si presta ad essere espressa in termini di cotangente iperbolica, cosicché essa, mediante la definizione (6.32), diventa

$$Z_n(h_1,\ \omega) =$$

$$= -\ (j\omega\mu/k_1)\mathrm{ctgh}\left[\ln\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} + k_1h_1\right] \qquad (6.35)$$

Invertendo l'espressione (6.35) si ricava poi

$$\ln\frac{\sqrt{E_{1\xi,1}(\omega)}}{\sqrt{E_{2\xi,1}(\omega)}} = \qquad (6.36)$$

$$= -\ \mathrm{ctgh}^{-1}[(k_1/j\omega\mu)Z_n(h_1,\ \omega)] - k_1h_1$$

avendo fatto uso dell'identità

$$\mathrm{ctgh}^{-1}(-w) = -\ \mathrm{ctgh}^{-1}(w) \qquad (6.37)$$

Sostituendo ora la (6.36) nella (6.33) ed usando la proprietà

$$\mathrm{ctgh}(-w) = -\ \mathrm{ctgh}(w) \qquad (6.38)$$

si ottiene

$$Z_n(0,\ \omega) = (j\omega\mu/k_1)\cdot\mathrm{ctgh}\{k_1h_1 +$$
$$+\ \mathrm{ctgh}^{-1}[(k_1/j\omega\mu)Z_n(h_1,\ \omega)]\} \qquad (6.39)$$

Per la condizione di continuità espressa dalla (6.28) e facendo uso della relazione (5.4), la (6.39) diventa in definitiva

$$Z_n(0,\ \omega) = \frac{k_1}{\sigma_1(\omega)}\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{ctgh}\left\{k_1h_1 + \mathrm{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sigma_1(\omega)}{k_1}Z_{n-1}(h_1,\ \omega)\right]\right\} \qquad (6.40)$$

Questa formula mette in relazione l'impedenza sulla superficie libera del modello stratificato con l'impedenza sulla sommità del secondo strato, che va a sua volta determinata. Ma data l'impostazione, il procedimento è chiaramente di tipo ricorrente, per cui, omettendo di ripetere identici passaggi matematici, possiamo ora scrivere la seguente formula iterativa, la quale, insieme alla (6.40) ed alla (6.20), fornisce definitivamente la soluzione cercata al problema della valutazione dell'impedenza magnetotellurica sulla superficie libera del modello di terra stratificata:

$$Z_{n-i+1}(d_{i-1},\omega) = \frac{k_i}{\sigma_i(\omega)} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{ctgh}\left\{k_i h_i + \operatorname{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sigma_i(\omega)}{k_i} Z_{n-1}(d_1, \omega)\right]\right\} \qquad (6.41)$$

per $i = 2,...,n-1$.

Poiché è valida l'identità

$$\operatorname{ctgh}[u + \operatorname{ctgh}^{-1}(w)] = \operatorname{tgh}[u + \operatorname{tgh}^{-1}(w)] \qquad (6.42)$$

con u e w generiche variabili complesse, le espressioni (6.40) e (6.41) possono essere riscritte nella forma equivalente

$$Z_n(0, \omega) = \frac{k_1}{\sigma_1(\omega)} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{tgh}\left\{k_1 h_1 + \operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{\sigma_1(\omega)}{k_1} Z_{n-1}(h_1, \omega)\right]\right\} \qquad (6.43)$$

$$Z_{n-i+1}(d_{i-1},\omega) = \frac{k_i}{\sigma_i(\omega)} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{tgh}\left\{k_i h_i + \operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{\sigma_i(\omega)}{k_i} Z_{n-1}(d_i, \omega)\right]\right\} \qquad (6.44)$$

per $i = 2, ..., n-1$.

7. L'impedività apparente in magnetotellurica nel caso di una terra stratificata e dispersiva

Prendiamo per un momento in esame il modello del semi-spazio omogeneo, isotropo e dispersivo, contraddistinto da una funzione di impedività $\rho(\omega)$, e calcoliamo l'impedenza d'onda magnetotellurica sulla sua superficie libera. La (6.20) permette subito di scrivere

$$Z_1(0, \omega) = \sqrt{j\omega\mu\rho(\omega)} \qquad (7.1)$$

da cui facilmente si ricava

$$\rho(\omega) = (-j/\omega\mu) Z_1^2(0, \omega) \qquad (7.2)$$

L'eq. (7.2) permette quindi di determinare la funzione complessa d'impedività del semi-spazio, attraverso il calcolo dei valori che l'impedenza superficiale assume in un opportuno intervallo di frequenze. Passiamo ora a scrivere le soluzioni magnetotelluriche degli spettri d'ampiezza e fase, rispettivamente come segue:

$$A(\omega) = (1/\omega\mu) \mid Z_1^2(0, \omega) \mid \qquad (7.3)$$

$$\Phi(\omega) = (\pi/2) - \arg[Z_1^2(0, \omega)] \qquad (7.4)$$

Le semplici soluzioni (7.2), (7.3) e (7.4) relative al semi-spazio sono fondamentali per poter definire le grandezze apparenti nel caso di una terra stratificata. Definiamo infatti funzione d'impedività magnetotellurica apparente la seguente grandezza:

$$\rho_a^d(\omega) = (-j/\omega\mu) Z_n^2(0, \omega) \qquad (7.5)$$

La scelta di questa definizione deriva dalla circostanza che si vuole che l'impedività magnetotellurica apparente si riduca ad assumere i valori di un'impedività vera, o intrinseca, solo nella eventualità che il sottosuolo sia di fatto costituito da un semi-spazio omogeneo, isotropo e dispersivo.

La relazione (7.5) può essere opportunamente esplicitata facendo riferimento alle formule (6.40), (6.41) e (6.20). Con semplici reiterate sostituzioni si ottiene in definitiva

$$\rho_a^d(\omega) = \rho_1(\omega)\operatorname{ctgh}^2\left\{k_1 h_1 + \right.$$

$$+ \operatorname{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_2(\omega)}}{\sqrt{\rho_1(\omega)}} \operatorname{ctgh}\left\{k_2 h_2 + \operatorname{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_3(\omega)}}{\sqrt{\rho_2(\omega)}} \cdot \right.\right.\right.$$

$$\cdot \operatorname{ctgh}\left\{k_3 h_3 + ... + \operatorname{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_{n-1}(\omega)}}{\sqrt{\rho_{n-2}(\omega)}} \cdot \right.\right. \qquad (7.6)$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\cdot \operatorname{ctgh}\left\{k_{n-1}h_{n-1} + \operatorname{ctgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_n(\omega)}}{\sqrt{\rho_{n-1}(\omega)}}\right]\right\}\right] ... \right\}\right]\right\}$$

Se invece si fa uso delle (6.42) e (6.20) si ottiene

$$\rho_a^d(\omega) = \rho_1(\omega)\mathrm{tgh}^2\Bigg\{k_1h_1 + + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_2(\omega)}}{\sqrt{\rho_1(\omega)}}\mathrm{tgh}\Bigg\{k_2h_2 + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_3(\omega)}}{\sqrt{\rho_2(\omega)}}\cdot \cdot\,\mathrm{tgh}\Bigg\{k_3h_3 + \ldots + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_{n-1}(\omega)}}{\sqrt{\rho_{n-2}(\omega)}}\cdot \cdot\,\mathrm{tgh}\Bigg\{k_{n-1}h_{n-1} + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\rho_n(\omega)}}{\sqrt{\rho_{n-1}(\omega)}}\right]\Bigg\}\right]\ldots\Bigg\}\right]\Bigg\}\right]\Bigg\} \tag{7.7}$$

Riferendoci alle relazioni (7.3) e (7.4), definiamo lo spettro d'ampiezza apparente e quello di fase apparente della funzione d'impedività magnetotellurica apparente rispettivamente nel seguente modo:

$$A_a^d(\omega) = (1/\omega\mu)\,|\,Z_n^2(0, \omega)\,| \tag{7.8}$$

$$\Phi_a^d(\omega) = (\pi/2) - \arg[Z_n^2(0, \omega)] \tag{7.9}$$

Prima di concludere questa sezione, riteniamo opportuno far notare che il criterio qui utilizzato per definire lo spettro di fase apparente è sostanzialmente diverso dal criterio adottato in magnetotellurica classica non dispersiva. In quest'ultima, infatti, la fase apparente di fatto descrive la variazione dell'argomento della funzione impedenza al variare della frequenza. Fisicamente ciò equivale a descrivere il comportamento della differenza di fase tra la componente elettrica e quella magnetica, sulla superficie del suolo, al variare della frequenza.

La ragione della scelta della definizione (7.9), per la magnetotellurica dispersiva, risiede invece nel fatto di volere che la fase apparente caratterizzi fisicamente il comportamento della fase di un'impedività vera, nel caso in cui il modello a n strati si riduca ad un semispazio.

Possiamo però comunque stabilire la relazione intercorrente fra le due definizioni di fase apparente. Infatti, in accordo con la convenzione della magnetotellurica classica, dovremmo definire fase apparente la grandezza

$$\varphi_a^d(\omega) = \arg[Z_n(0, \omega)] \tag{7.10}$$

Confrontando ora la (7.9) con la (7.10) deduciamo facilmente le seguenti relazioni mutue:

$$\varphi_a^d(\omega) = (\pi/4) - \frac{1}{2}\,\Phi_a^d(\omega) \tag{7.11}$$

$$\Phi_a^d(\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_a^d(\omega) \tag{7.12}$$

8. Il metodo magnetotellurico dispersivo

Se si analizzano le cose da un punto di vista pratico, ci si rende subito conto che, a meno che non si abbia la certezza di stare ad operare su mezzi polarizzabili, in linea generale le curve di risposta magnetotellurica possono sempre essere interpretate secondo i canoni di analisi della magnetotellurica convenzionale, e perciò essere ritenute come la risposta di terreni non dispersivi e non omogenei, ad esempio stratificati, mentre in realtà possono anche riferirsi a situazioni dispersive. Si tratta quindi di una nuova situazione nell'ambito del classico problema dell'equivalenza. In buona sostanza si può dire che la metodologia magnetotellurica da sola non è in grado di discernere gli effetti di dispersione, o viceversa può indurre a vedere la dispersione laddove di fatto non esiste.

Nasce pertanto la necessità di realizzare una forma di confronto, che permetta di risolvere la situazione di equivalenza.

È possibile in linea di principio risolvere il problema introducendo una metodologia più complessa di prospezione ed interpretazione delle misure, basata sull'uso integrato della magnetotellurica e della geoelettrica, col fine preciso di sciogliere le ambiguità che nascono da tale equivalenza. Chiameremo questa nuova metodologia *magnetotellurica dispersiva*, usando eventualmente la sigla DMT derivante dalle iniziali delle stesse parole tradotte in lingua inglese: *dispersion magneto-tellurics*. Il nuovo metodo comporta pertanto l'esecuzione nello stesso sito di un rilievo magnetotellurico convenzionale (MT), per quanto concerne le sole fasi di acquisizione ed elaborazionee delle registrazioni di campagna, e di un rilievo geoelettrico profondo con corrente continua, con dispositivo di Schlumberger (VES) o ancor meglio con dispositivo dipolare (DES). Simbolicamente possiamo sintetizzare quanto detto come segue: DMT = MT + VES, oppure DMT = MT + DES. A sostegno della scelta del metodo geoelettrico dobbiamo ricordare che il sondaggio in corrente continua (o a frequenza molto bassa, diciamo non superiore a 0.01 Hz) è di fatto esente da problemi legati alla dispersione, in quanto regolato soltanto dalle resistività in continua $\rho_{0,i}$.

Come si vede, la proposta non influisce in nessun modo sulle tecniche di prospezione magnetotellurica e geoelettrica. La nuova metodologia è tutta incentrata sulla fase d'interpretazione delle misure elaborate, che viene ora meglio descritta lungo le sue linee essenziali.

Le sequenze delle resistività e degli spessori degli strati, che caratterizzano i modelli geoelettrici, interpretati secondo i criteri soliti, possono essere utilizzati per calcolare diagrammi magnetotellurici sintetici, i quali hanno il preciso significato di rappresentare fisicamente la risposta magnetotellurica dei siti nell'ipotesi di completa assenza di dispersione. A questo punto è chiaro che il confronto, sito per sito, del diagramma magnetotellurico sintetico con quello reale non può che dare una delle seguenti due risposte.

La prima risposta è che se il confronto mostra un accettabile accordo, allora o si devono escludere effetti di polarizzazione indotta, e il modello è quindi da ritenersi totalmente non dispersivo, oppure si deve ritenere che gli effetti di dispersione, pur esistendo, non sono tali da distorcere apprezzabilmente i segnali magnetotellurici, i quali condurrebbero con sé informazioni incomplete dal punto di vista fisico, ma certo non contraddittorie dal punto di vista geometrico. Quest'ultimo concetto sarà meglio sviluppato nel seguito. Ovviamente tale confronto va inteso entro i limiti d'incertezza dovuti alla presenza di rumore sulle curve magnetotellurica e geoelettrica sperimentali, provocato e da sorgenti elettromagnetiche spurie e da effetti di disturbo laterali, che riterremo comunque filtrati in maniera ottimale.

La seconda risposta è che se il confronto mostra disaccordo, allora è possibile ammettere l'esistenza di effetti di polarizzazione provocata in un certo intervallo di profondità nella sezione geoelettrica, purché la discrepanza che si presenta sia consistente, almeno dal punto di vista qualitativo, sia con i principi generali della teoria magnetotellurica dispersiva, qui enunciati, che con la stessa fenomenologia della dispersione. Ovviamente anche in questo caso valgono le stesse considerazioni di prima circa le limitazioni dovute ai disturbi naturali e artificiali.

9. La funzione di dispersione apparente

Per quantificare le considerazioni su esposte a proposito del metodo DMT, introduciamo ora il concetto di funzione di dispersione apparente, $d_a(\omega)$, attraverso il seguente filo logico.

Consideriamo nuovamente, come punto di partenza, l'elementare modello del semi-spazio dispersivo, contraddistinto da una generica impedività $\rho(\omega)$. Dall'equazione

$$\rho(\omega) = \rho_0[1 - d(\omega)] \tag{9.1}$$

che definisce la funzione d'impedività, otteniamo rapidamente la seguente relazione per la funzione di dispersione caratteristica:

$$d(\omega) = 1 - \rho(\omega)/\rho_0 \tag{9.2}$$

Se passiamo ora al più generale modello unidimensionale, costituito da una sequenza di strati piano-paralleli, definiamo la funzione di dispersione apparente in questo modo:

$$d_a(\omega) = 1 - \rho_a^d(\omega)/\rho_a(\omega) \tag{9.3}$$

dove $\rho_a^d(\omega)$ rappresenta, come sappiamo, l'impedività magnetotellurica apparente, definita dalla formula (7.5) e meglio esplicitata nelle equazioni generali (7.6) o (7.7), e $\rho_a(\omega)$ è la resistività magnetotellurica apparente riferita allo stesso modello, nel quale però tutti gli strati sono considerati non dispersivi e quindi caratterizzati solo dai valori di resistività $\rho_{0,i}(i = 1,2,..,n)$.

Anche in questo caso la definizione della grandezza apparente segue il criterio generale di dover restituire l'analoga grandezza vera, o intrinseca, nel caso in cui il modello stratificato si riduca al semi-spazio omogeneo. Infatti, quando ciò avviene la (9.3) si riduce effettivamente alla (9.2), poiché, per quanto già si è visto in una sezione precedente, l'impedività magnetotellurica apparente diventa proprio l'impedività intrinseca del semi-spazio dispersivo e la resistività magnetotellurica apparente diventa, com'è ben noto, la sua resistività intrinseca, nel caso di mancanza di dispersione.

In una forma funzionale affatto generale, l'impedività e la resistività apparente possono essere scritte come segue:

$$\rho_a^d(\omega) = \rho_a^d[\rho_1(\omega), \ldots, \rho_i(\omega), \ldots, \rho_n(\omega); \omega] \quad (9.4)$$

$$\rho_a(\omega) = \rho_a[\rho_{0,1}, \ldots, \rho_{0,i}, \ldots, \rho_{0,n};\ \omega] \quad (9.5)$$

Sviluppando la (9.4) in serie di Taylor, otteniamo

$$\rho_a^d(\omega) = \rho_a^d(\omega)|_{d_1(\omega)=\ldots=d_n(\omega)=0} +$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \rho_{0,i} d_i(\omega) \frac{\partial \rho_a^d(\omega)}{\partial \rho_i(\omega)} |_{d_1(\omega)=\ldots=d_n(\omega)=0} \quad (9.6)$$
$$+ \textit{ termini di ordine superiore.}$$

È immediato riconoscere, in virtù delle definizioni (9.1), (9.4) e (9.5), e delle formule esplicite dell'impedività magnetotellurica apparente, data dalla (7.6) o dalla (7.7), e della resistività magnetotellurica apparente, qui non riportata, che

$$\rho_a^d(\omega)|_{d_1(\omega)=\ldots=d_n(\omega)=0} = \rho_a(\omega) \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial \rho_a^d(\omega)}{\partial \rho_i(\omega)} |_{d_1(\omega)=\ldots=d_n(\omega)=0} = \frac{\partial \rho_a(\omega)}{\partial \rho_{0,i}(\omega)} \quad (9.8)$$

e risultati analoghi per le derivate di ordine superiore. Pertanto, lo sviluppo di Taylor (9.6) assume l'interessante forma

$$\rho_a^d(\omega) = \rho_a(\omega) - \sum_{i=1}^{n} \rho_{0,i} d_i(\omega) \frac{\partial \rho_a(\omega)}{\partial \rho_{0,i}} +$$
$$+ \textit{ termini di ordine superiore.} \quad (9.9)$$

Sostituendo lo sviluppo (9.9) nella definizione (9.3), otteniamo definitivamente

$$d_a(\omega) = \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) \frac{\rho_{0,i}}{\rho_a(\omega)} \frac{\partial \rho_a(\omega)}{\partial \rho_{0,i}} - \ldots \quad (9.10)$$

Un'espressione della funzione di dispersione magnetotellurica apparente, molto utile dal punto di vista pratico, la otteniamo approssimando lo sviluppo in serie di Taylor (9.9) con la somma dei primi due termini, cioè

$$d_a(\omega) \approx \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) \frac{\partial \ln \rho_a(\omega)}{\partial \ln \rho_{0,i}} \quad (9.11)$$

Chiameremo d'ora in poi tutti i termini caratterizzati dalla derivata logaritmica della resistività magnetotellurica apparente *fattori di diluizione*.

Ovviamente l'approssimazione (9.11) risulterà tanto più accurata quanto meno rilevanti sono gli effetti della dispersione. Se si fa riferimento ad alcune evidenze sperimentali, relative a situazioni geologico-minerarie superficiali, si può allora ritenere che tale approssimazione sia di fatto accettabile.

10. Due casi istruttivi

Consideriamo ora da vicino alcune semplici situazioni realistiche per le quali possiamo ottenere una soluzione interpretativa pressoché immediata grazie all'approssimazione (9.11).

Il primo caso che andiamo a trattare è quello che si riferisce al singolo strato dispersivo, diciamo l'i-esimo, nell'ambito di un modello di terra a n strati piano-paralleli.

Essendo perciò uguali a zero tutte le funzioni caratteristiche di dispersione tranne quella che appartiene allo strato polarizzabile, cioè la $d_i(\omega)$, la formula (9.11) diventa

$$d_a(\omega) \approx d_i(\omega) \frac{\partial \ln \rho_a(\omega)}{\partial \ln \rho_{0,i}} \quad (10.1)$$

dalla quale immediatamente si ricava

$$d_i(\omega) \approx \frac{d_a(\omega)}{[\partial \ln \rho_a(\omega)/\partial \ln \rho_{0,i}]} \quad (10.2)$$

La funzione caratteristica di dispersione del singolo strato polarizzabile può così essere interamente ricostruita. È però il caso di far osservare che una conclusione di tal fatta, del tutto inoppugnabile, ha una sua validità generale solo dal punto di vista teorico. Infatti, in pratica può accadere che l'intervallo di frequenza in cui la dispersione mostra gli effetti più rilevanti, non si sovrapponga all'intervallo in cui il fattore di diluizione che appare nella soluzione (10.2) assume valori significativamente al di sopra dello zero. In particolare, se accade che la banda di frequenza della dispersione occupi il settore per così dire dell'alta frequenza, mentre la banda del fattore di diluizione il settore della bassa frequenza, gli effetti della polarizzazione nello strato i-esimo non potranno mai essere rivelati. Al contrario, la migliore risoluzione si ottiene quando la banda di dispersione cade all'interno della banda di diluizione. Da ciò deriva che per una assegnata legge di dispersione dello strato polarizzabile, la risoluzione diminuisce al crescere della profondità dello strato. Consideriamo infine la situazione esattamente inversa, cioè quando l'intervallo di frequenza della funzione di dispersione occupi il settore a bassa frequenza, mentre quello del fattore di diluizione il settore ad alta frequenza. In questa situazione praticamente determineremmo l'effetto frequenza dello strato. Ragionando allo stesso modo, il lettore potrebbe immaginare facilmente i risultati relativi a qualsiasi altra situazione, come ad esempio la situazione in cui soltanto il primo strato è assunto polarizzabile.

Passiamo ora ad un secondo interessante esempio, quello cioè dell'intera sezione stratificata uniformemente polarizzabile. In questo caso tutte le funzioni caratteristiche di dispersione sono uguali tra loro, mentre le resistività in continua possono differenziarsi a piacere. Abbiamo quindi

$$d_1(\omega) = \ldots = d_i(\omega) = \ldots = d_n(\omega) = d(\omega) \quad (10.3)$$

$$\rho_{0,1} \neq \ldots \neq \rho_{0,i} \neq \ldots \neq \rho_{0,n} \quad (10.4)$$

Sostituendo le condizioni (10.3) e (10.4) nella formula di riferimento (9.11) si ottiene

$$d_a(\omega) \approx d(\omega) \sum_{i=1}^{n} [\partial \ln \rho_a(\omega) / \partial \ln \rho_{0,i}] \quad (10.5)$$

da cui immediatamente si deriva

$$d(\omega) \approx \frac{d_a(\omega)}{\Sigma_{i=1}^{n} [\partial \ln \rho_a(\omega) / \partial \ln \rho_{0,i}]} \quad (10.6)$$

L'espressione (10.6) ci dà la descrizione completa della legge di dispersione, uniforme in tutta la sezione.

Onde evitare i lunghi calcoli necessari per valutare la somma al denominatore della (10.6), facciamo ricorso ad una proprietà della funzione di resistività magnetotellurica apparente, che qui di seguito riportiamo, tralasciando di sviluppare la sua semplice dimostrazione:

$$\begin{aligned} &\rho_a(\alpha\rho_{0,1},\ldots,\alpha\rho_{0,i},\ldots,\alpha\rho_{0,n};\ \alpha\omega) = \\ &= \alpha\rho_a(\rho_{0,1},\ldots,\rho_{0,i},\ldots,\rho_{0,n};\ \omega) \quad (10.7) \end{aligned}$$

dove α è un fattore moltiplicativo qualsiasi.

Calcolando ora la derivata prima rispetto ad α di entrambi i membri della (10.7), e ponendo poi $\alpha = 1$, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \rho_a(\omega)}{\partial \ln \rho_{0,i}} = 1 - \frac{\partial \ln \rho_a(\omega)}{\partial \ln \omega} \quad (10.8)$$

che, sostituita nella (10.6), ci fornisce la seguente forma, decisamente più semplice ai fini della determinazione della funzione caratteristica di dispersione del modello stratificato, uniformemente polarizzabile:

$$d(\omega) \approx \frac{d_a(\omega)}{1 - [\partial \ln \rho_a(\omega) / \partial \ln \omega]}. \quad (10.9)$$